RIFLESSIONI

SUL MOTO PERMANENTE DELL' ACQUA

NE' CANALI ORIZZONTALI

MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE

GIORGIO BIDONE

INSERITA NEL TOMO XIX. DEGLI ATTI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

MODENA

PRESSO LA TIPOGRAFIA CAMERALE

MDCCCXXIV.

RIFLESSIONI

Sul moto permanente dell' acqua ne' canali orizzontali

MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE GIORGIO BIDONE

Il moto permanente dell' acqua in un canale orizzontale può determinarsi ogni qual volta lo sbocco dell' acqua dal canale si fa per una luce di cui si sappia calcolare la portata, e per cui la velocità media dell' efflusso sia funzione nota dell' altezza dell' acqua nel canale. Infatti in questo caso, assai frequente negli sbocchi de' canali orizzontali, è chiaro che paragonando la portata dello sbocco espressa per l' altezza dell' acqua nel canale, alla portata della sezione del canale rappresentata dal prodotto della velocità media nell' area della sezione, si ottiene questa velocità media espressa in funzione dell' altezza dell' acqua nel canale; e così la portata e la velocità media della sezione essendo funzioni note dell' altezza dell' acqua nel canale, sarà determinato il moto che quì si prende a considerare. Perciò quando l' espressione della portata della luce dello sbocco contiene l' altezza dell' acqua nel canale, il moto permanente di questa si determina coi soli principj che servono a calcolare l' efflusso dalle luci, combinati colla condizione della permanenza del moto dell' acqua nel canale.

Se si applica la teorìa del moto lineare e permanente de' liquidi al caso in cui il vaso è un canale aperto al di sopra, col fondo e colla superficie della corrente orizzontali, si arriva a due equazioni, l' una delle quali è relativa all' ef-

flusso dallo sbocco, posto al termine del canale; e l'altra esprime la ragione con cui stanno tra loro le sezioni e le velocità medie: e queste equazioni sono appunto quelle che si ottengono colla teorìa degli efflussi dalle luci, combinata colla condizione della permanenza del moto.

La velocità media dell' efflusso dalla luce dello sbocco essendo diversa secondo la diversa forma e posizione della luce stessa, dovrà cercarsi con metodi adattati a ciascun caso particolare. Così se il piano della luce è verticale, la velocità media si ricaverà dalle formule per gli efflussi laterali. Conosciuta la velocità dell' efflusso dallo sbocco, e posta la condizione del moto stabilito e permanente, la relazione tra le sezioni e le velocità darà la velocità media della sezione del canale. Data pertanto la luce dello sbocco, e la sezione del canale, si avranno in ciascun caso particolare, e nei diversi stati permanenti del canale, le relazioni della portata e della velocità media all' altezza della corrente, e sarà quindi determinato il moto lineare e permanente dell' acqua nel canale.

Prese pertanto le equazioni relative alla portata dello sbocco, ed alla portata della sezione del canale, e supposta costante la sezione di uno stesso canale, si considerano, nelle presenti riflessioni diversi casi particolari, nei quali, data la luce dello sbocco, e dato il profilo della sezione del canale, le relazioni dell' altezza alla velocità media ed alla portata della sezione vengono determinate ed espresse da formule rigorose. Se il profilo della luce dello sbocco, e quello della sezione del canale sono continui per tutti gli stati permanenti che si considerano, queste relazioni si conservano sempre le stesse: nel caso contrario esse variano ne' diversi stati del canale, e può quindi fra questi esserne uno, in cui la velocità media della sezione divenga massima.

Dopo queste considerazioni su diversi casi, ne' quali è data la luce dello sbocco, e la sezione del canale, si passa al problema inverso, in cui, essendo data la luce dello sboc-

co, si domanda di determinare il profilo della sezione del canale in maniera che la velocità media della corrente abbia e conservi ne' diversi stati permanenti del canale una ragione data all' altezza dell' acqua.

Si esamina in seguito il problema più generale, in cui si cerca il profilo della luce dello sbocco, e quello della sezione del canale, affinchè tanto la velocità media quanto la portata della sezione abbiano rispettivamente una ragione data all' altezza dell' acqua in qualunque stato permanente del canale.

Chiamando Q, H e v la portata, l' altezza e la velocità media della sezione della corrente nel canale, si trovano tra queste quantità, secondo i diversi profili della luce dello sbocco e della sezione del canale, diversi sistemi di relazioni, come per esempio li seguenti, ove per brevità si sono ommessi i coefficienti costanti:

$v = \frac{1}{\sqrt{H}}$;	$Q = \sqrt{H}$:	$v = \text{cost.}$;	$Q = H^2\sqrt{H}$:
$v = \sqrt{H}$;	$Q = H\sqrt{H}$:	$v = \frac{1}{\sqrt{H}}$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:
$v = H\sqrt{H}$;	$Q = H^2\sqrt{H}$:	$v = \frac{1}{H}$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:
$v = \sqrt{H}$;	$Q = H^2\sqrt{H}$:	$v = \text{cost.}$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:
$v = \text{cost.}$;	$Q = H\sqrt{H}$:	$v = \sqrt{H}$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:
$v = H$;	$Q = H^2\sqrt{H}$:	$v = H$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:
$v = H^2$;	$Q = H^3\sqrt{H}$:	ecc.	

Da questi esempj e da altri che quì si tralasciano si vede come ne' canali orizzontali la velocità possa diminuire, o

rimaner costante, o crescere, crescendo l' altezza e la portata; e come le ragioni della velocità e della portata all'altezza dipendano dalla forma e posizione della luce dello sbocco, e dal profilo della sezione del canale. Perciò in due canali orizzontali queste ragioni saranno affatto diverse tra loro, se saranno diverse le sezioni e gli sbocchi dei due canali. Che anzi le medesime ragioni varieranno in uno stesso canale da uno stato permanente all'altro, quando non sarà osservata la legge di continuità nel profilo della luce dello sbocco, o in quello della sezione del canale, o nell'uno e nell'altro. Queste stesse conseguenze sono applicabili a que' tratti di un canale inclinato, ne' quali le acque sono e restano rigurgitate, e colla superficie orizzontale, ne' diversi stati permanenti che si considerano. Ma negli altri tratti del medesimo canale inclinato ne' quali agiscono le sole resistenze uniformi provegnenti dal fondo e dalle sponde, e la superficie della corrente è parallela al fondo, e le sezioni sono eguali tra loro, il moto è affatto indipendente dall' efflusso dallo sbocco del canale, e le note equazioni che lo rappresentano, non contengono altra sezione che quella della corrente medesima.

Quindi se in questo caso si riguarda il profilo della sezione del canale come indeterminato, ma continuo, una sola relazione data, quella per esempio tra la velocità media e l' altezza della corrente, basta per determinarne il perimetro e l' area in funzione dell' altezza medesima, e con ciò resta pure determinata in funzione dell' altezza la portata della sezione. Così si trova che si può assegnare alla sezione un profilo tale, che giunta la corrente ad una certa altezza, la velocità media più non prende aumento sensibile per qualunque ulteriore alzamento della corrente; la portata all' opposto cresce assai rapidamente per poco che cresca l' altezza. Le relazioni tra la portata, l' altezza e la velocità della corrente per questi stati permanenti del canale sono così espresse;

$$v = \text{cost.}\,;\ Q = e^{H}\,;$$

ommettendo i coefficienti costanti, ed essendo e la base dei logaritmi iperbolici.

1. Il canale di fondo orizzontale che quì consideriamo, ha una lunghezza indefinita, cosicchè si può all' uopo supporre, che le sezioni ed i tratti del medesimo, sui quali si ragionerà, sono a grandissima distanza e dal principio e dal termine del canale. Le sezioni si suppongono eguali tra loro in tutta la lunghezza del canale, in modo che questo si può intendere generato dallo scorrimento di una di esse parallelamente a se stessa. Qualunque poi sia la figura della sezione, essa si concepisce tale, che il canale è capace di qualsivoglia portata senza che le acque trabocchino. Il canale è alimentato al suo principio da un influsso costante d' acqua, ed il movimento di questa nel canale è sempre considerato ridotto a stato di permanenza.

2. Poste queste cose, risulta dall' osservazione, che qualunque sia la maniera con cui l' acqua sbocca al termine del canale, se si considera un tratto del medesimo, posto a conveniente distanza dallo sbocco, per questo tratto, e per la rimanente parte superiore del canale, la superficie dell' acqua è sensibilmente orizzontale e parallela al fondo. Risulta pure che in qualunque sezione del canale, presa a conveniente distanza dallo sbocco, l' acqua si muove tanto presso al fondo, che alla superficie ed alle sponde, cioè che la sezione è tutta viva: e questa proprietà si mantiene in tutte le sezioni superiori a quella che si considera, ed anche nelle sezioni inferiori ad una distanza più o meno grande dallo sbocco, secondo le particolari circostanze del medesimo. L' osservazione dimostra in fine che ne' tratti posti a conveniente distanza dal principio e dal termine del canale, e ne' quali la superficie si conserva sensibilmente parallela al fondo, il movimento delle molecole acquee si fa secondo linee orizzontali, e parallele tra loro ed all' asse del canale, senza alcun deviamento laterale o verticale.

3. Abbia ora il canale il fondo piano, e le pareti verticali e parallele tra loro, e chiamiamo

L la larghezza del canale;

H l' altezza della corrente in una sezione di un tronco del canale, in cui la superficie è parallela al fondo;

v la velocità media della corrente nella sezione che si considera;

Q la portata del canale in un minuto secondo: sarà

$$(A) \qquad Q = H L v.$$

Fra le diverse maniere di sbocco consideriamo in primo luogo la seguente. Si concepisca che il canale, al suo termine, sia attraversato e chiuso da un piano solido e verticale, d' altezza indefinita, e perpendicolare all' asse del canale, e che in questo piano venga aperta una luce rettangola di base orizzontale, e sia

l la larghezza della luce;

a l' altezza della medesima;

b il battente, ossia l' altezza dell' acqua sopra il lato superiore della luce;

D l' altezza del lato inferiore della luce sopra il fondo del canale;

sia inoltre

μ il coefficiente della contrazione della vena fluida, relativo a questa luce;

g la gravità terrestre;

e sia libero l' efflusso dalla luce.

4. Per esprimere generalmente la portata di questa luce, conviene aver riguardo alla velocità colla quale le molecole acquee arrivano al conoide che si forma intorno alla luce, e nel quale esse ricevono e compiono la loro accelerazione. Ora questa velocità dipende dalla ragione più o meno grande dell' area della luce all' area della sezione del canale. Pertanto per tener conto di questa velocità iniziale delle molecole,

noi supporremo che essa, per ciascuna molecola, è eguale alla velocità media

$$v = \frac{Q}{HL}$$

della sezione del canale, a cui è dovuta l'altezza

$$h = \frac{Q^2}{2gH^2L^2}:$$

e così accresceremo il battente effettivo b dell'altezza h, mediante il qual aumento si avrà il dovuto riguardo alla velocità propria dell'acqua nel canale, ossia alla ragione dell'area della luce a quella della sezione del canale. Questa maniera di tener conto della velocietà colla quale le molecole arrivano alla luce, è per se stessa sufficientemente esatta, ed è pure conforme alla teoria del moto lineare de' liquidi.

5. Ciò posto, la portata della luce sarà data dall'equazione

$$\text{(B)} \quad Q = \tfrac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[\left(a+b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Liberando questa equazione dai radicali, si arriva ad una equazione di ottavo grado rispetto all' incognita Q, riducibile al quarto. Se l' equazione così ridotta si potesse risolvere algebraicamente, si avrebbe in ogni caso la portata della luce e del canale espressa per le sole dimensioni dell' una e dell'altro; e paragonando tra loro i due valori di Q, l' uno preso dall' equazione (A), l' altro dall' equazione (B), si ricaverebbe il valore della velocità media v della sezione del canale espresso per l' altezza dell' acqua contenuta nel medesimo. Ma questo valore di v non si può ottenere, poichè non si ha la risoluzione algebraica dell' equazione (B) rispetto alla quantità Q. Perciò riserbandoci di esporre più sotto un metodo assai facile per averne per approssimazione la risoluzione nu-

merica, noi esamineremo alcuni casi, ne' quali l' equazione (B), prendendo una forma più semplice, è risolubile rispetto all' incognita Q.

6. Consideriamo il caso in cui l'area della luce, fornita di battente, è assai piccola rispetto alla sezione del canale, in modo che si può trascurare il termine $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$. Si conosce facilmente quando questo termine si possa trascurare, note che siano le dimensioni e la posizione della luce, e la sezione del canale. In questo caso l'equazione (B) diventa

$$Q = \frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[(a+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right].$$

Combinando questa equazione colla (A), e notando che si ha

$$H = D + a + b,$$

e facendo per brevità

$$\alpha = \frac{2\mu l\sqrt{2g}}{3L},$$

α essendo in questo caso una quantità costante, si trova

$$(1) \qquad v = \frac{\alpha}{H}\cdot\left[(H-D)^{\frac{3}{2}} - (H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$(2) \qquad Q = \alpha L.\left[(H-D)^{\frac{3}{2}} - (H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

e così riguardando D ed a come costanti, cioè la posizione e le dimensioni della luce come invariabili, qualunque sia lo stato permanente del canale, si avranno la velocità media v, e la portata Q del canale espresse in funzioni note dell' altezza H. Si conosceranno quindi le ragioni colle quali questa ve-

locità e questa portata crescono o calano quando il canale passa da uno stato permanente H ad un altro H'.

7. Per vedere come e quando cresca o cali la velocità media v del canale, si prenda il differenziale di v rispetto ad H dall' equazione (1), e si avrà

$$\frac{dv}{adH} = \frac{\left(\frac{H}{2}+D\right)\sqrt{H-D}-\left(\frac{H}{2}+D+a\right)\sqrt{H-D-a}}{H^2}$$

e facendo $\frac{dv}{dH}=0$, si ottiene primieramente

$$H = 2\sqrt{\frac{a^2+3aD+3D^2}{3}},$$

il qual valore è $> D+a$, e corrisponde al massimo di v.

Perciò quando tra H, D ed a si avrà l' equazione precedente, la velocità media v sarà la massima fra quelle che corrispondono ai diversi stati permanenti del canale, pei quali lo sbocco si fa dalla stessa luce. Il battente della luce relativo al valore precedente di H è

$$b = 2\sqrt{\frac{a^2+3aD+3D^2}{3}}-D-a;$$

dal che si vede che per una stessa luce si richiede un maggior battente a misura che il suo lato inferiore è più elevato sopra il fondo del canale, affinchè la velocità media di questo sia la massima fra tutte. Così se D è assai grande rispetto ad a, il valore di H corrispondente al massimo di v è prossimamente

$$H = 2D + a;$$

e

$$b = D.$$

Perciò D ed a essendo dati e costanti, la velocità media del canale crescerà dallo stato permanente in cui è

$$H = D + a,\ \text{e}\ b = 0,$$

sino allo stato permanente in cui si ha

$$H = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}},$$

e

$$b = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}} - D - a,$$

pel quale stato la velocità v sarà massima. Poi l' altezza H continuando a crescere, la velocità media diminuirà; e la legge dell' aumento e della diminuzione della velocità media sarà data dall' equazione (1).

8. L' equazione $\frac{dv}{dH} = 0$ somministra in secondo luogo $H = \infty$, il qual valore corrisponde al minimo di v. Facendo dunque H quantità grandissima nelle equazioni (1) e (2) si ottiene

$$v = \frac{3aa}{2\sqrt{H}};\ Q = \frac{3aaL\sqrt{H}}{2}:$$

perciò negli stati permanenti del canale, ne' quali l' altezza dell' acqua è assai grande a confronto delle quantità D ed a, le velocità medie calano in ragione inversa delle radici delle altezze, e le portate crescono come le stesse radici: cioè queste ragioni sono propriamente le estreme alle quali s' avvicinano sempre più le ragioni delle velocità medie e delle portate alle altezze dell' acqua, a misura che queste vanno crescendo.

9. Considerando sempre il medesimo caso di luce assai piccola in paragone della sezione del canale, supponiamo il battente picciolissimo, cioè

$$H - D - a = b = \omega,$$

essendo ω quantità piccolissima rispetto ad a. Le equazioni

(1) e (2) daranno in questo caso, trascurando le potenze di ω superiori alla prima,

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{D+a}\left[a + \frac{(3D+a)\omega}{2(D+a)}\right];$$

$$Q = \frac{\alpha L\sqrt{a}}{2}\left[2a + 3\omega\right];$$

ossia

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\left[3 - \frac{(3D+a)}{H}\right];$$

$$Q = \frac{\alpha L\sqrt{a}}{2}\left[3H - (3D+a)\right].$$

Da queste equazioni, nelle quali non deve mai essere $H < D + a$, si hanno le relazioni delle velocità medie e delle portate alle altezze dell'acqua negli stati permanenti, ne' quali il battente della luce si conserva piccolissimo.

10. Nel caso pertanto dello sbocco contemplato nei tre numeri precedenti, la velocità media della corrente, la quale è rigorosamente rappresentata dall' equazione (1), varia negli stati permanenti estremi in modo che quando a, D ed H sono tali, che il battente è piccolissimo, essa è così espressa

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\left[3 - \frac{(3D+a)}{H}\right]:$$

Negli stati permanenti ne' quali H è grandissima rispetto ad a e D, la velocità media è

$$v = \frac{3\alpha a}{2\sqrt{H}}:$$

Negli altri stati permanenti intermedii la velocità media è data dall' equazione (1)

$$v = \frac{\alpha}{H}\left[(H-D)^{\frac{3}{2}} - (H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right]:$$

e si avrà un' idea abbastanza precisa e chiara dell' andamento della funzione di H contenuta nel secondo membro di quest'ultima equazione, osservando che essa è sempre tale che si ha

$$v < \frac{3a\sqrt{H - D - \frac{a}{2}}}{2H};$$

$$v > \frac{3a\sqrt{H - D - \frac{5a}{9}}}{2H};$$

come è facile di assicurarsi, ritenendo che nelle precedenti relazioni non deve mai essere $H < D + a$. Questi limiti fra i quali è sempre compresa la velocità media, sono assai vicini tra loro, anche nel caso più disfavorevole, come si può facilmente vedere.

11. Passiamo ora al caso in cui la luce dello sbocco, essendo fornita di battente, non è più assai piccola rispetto alla sezione del canale. In questo caso non si può trascurare la velocità colla quale le molecole arrivano alla luce, e si deve far uso dell' equazione (B). Perciò se in questa equazione mettiamo in vece di Q, $a+b$ e b i loro valori HLv, $H-D$ ed $H-D-a$ avremo

$$\text{(C)} \qquad v = \frac{a}{H}\left(H - D + \frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(H - D - a + \frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}};$$

la quale equazione darà la relazione tra v ed H ne' diversi stati permanenti del canale. Differenziandola rispetto a v e ad H, v essendo funzione di H, e facendo $\frac{dv}{dH} = 0$, si ottiene primieramente $H = \infty$: ma quando $H = \infty$, l' area della luce, la quale è invariabile, diventa piccolissima a confronto della sezione del canale, perciò in questo caso si hanno le conseguenze già esposte al n.° 8.

Dall' equazione $\frac{dv}{dH}=0$ si ha ancora quest' altra

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{3(2D+a)\pm\sqrt{9H^2-3a^2}}{6}:$$

Sostituendo questo valore di v nell' equazione (C) si avrà una equazione determinata in H, dalla quale, posta la risoluzione analitica delle equazioni, si ricaverebbe il valore di questa quantità espresso per D ed a, e si avrebbe il valore di H, che rende massima la velocità v.

12. Quanto si è detto sin quì, si può comprendere nelle seguenti considerazioni, qualunque sia la grandezza della luce dello sbocco a paragone della sezione dell' acqua nel canale. La portata della luce è in ogni caso data dall' equazione

$$(B)\quad Q=\frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[\left(a+b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]:$$

Si scrivano ora queste due altre equazioni

$$P=\mu al\sqrt{2g}\,.\sqrt{b+\frac{a}{2}+\frac{P^2}{2gH^2L^2}};$$

$$R=\mu al\sqrt{2g}\,.\sqrt{b+\frac{4a}{9}+\frac{R^2}{2gH^2L^2}}.$$

Dalla teoria degli efflussi, come pure dal calcolo diretto, paragonando tra loro le espressioni precedenti, facilmente si vede essere

$$Q<P;\ Q>R:$$

e facendo

$$v'=\frac{P}{HL};\qquad v''=\frac{R}{HL};$$

essendo la velocità media vera

$$v=\frac{Q}{HL},$$

si avrà

$$v=\frac{2\mu l\sqrt{2g}}{3HL}\cdot\left[\left(a+b+\frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(b+\frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$v'=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{HL}\cdot\sqrt{b+\frac{a}{2}+\frac{v'^2}{2g}};$$

$$v''=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{HL}\cdot\sqrt{b+\frac{4a}{9}+\frac{v''^2}{2g}};$$

e sarà

$$v<v';\ v>v''.$$

Risolvendo le due ultime equazioni rispetto alle quantità v' e v'', ed osservando che si ha $H=D+a+b$, si ottiene

$$v'=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L}\cdot\frac{\sqrt{H-D-\frac{a}{2}}}{\sqrt{H^2-\frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}}};$$

$$v''=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L}\cdot\frac{\sqrt{H-D-\frac{5a}{9}}}{\sqrt{H^2-\frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}}},$$

Nelle quali equazioni vuolsi notare che non può mai essere $H<D+a$, poichè nella luce che quì si considera e che serve di sbocco al canale, le quantità D ed a sono date e costanti, e le relazioni che si cercano sono unicamente relative alle successive variazioni del battente b da $b=0$ sino a $b=\infty$, cioè rimanendo b quantità sempre positiva:

13. Dai valori di v' e di v'' si vede che quando H è grandissima a paragone di D e di a, si ha

$$v'=v''=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L\sqrt{H}};$$

e perciò sarà anche

$$v=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L\sqrt{H}}.$$

Chiamando H' il valore di H che rende v' massimo, si trova

$$H'=D+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(D+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}}:$$

e siccome non può mai essere $H<D+a$, si dovrà avere

$$D=\text{, oppure }>a\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\mu^2l^2}{L^2}}-\frac{1}{4}\right);$$

e quando l' una o l' altra di queste condizioni sarà soddisfatta, v' avrà un valor massimo

$$V'=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L\sqrt{2H'}}.$$

Nell' istesso modo chiamando H'' il valore di H che rende v'' massimo, si troverà

$$H''=D+\frac{5a}{9}+\sqrt{\left(D+\frac{5a}{9}\right)^2-\frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}};$$

e dovrà essere

$$D=\text{, oppure }>a\left[\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{\mu^2l^2}{L^2}}-\frac{5}{9}\right];$$

posta l' una o l' altra di queste condizioni, il valor massimo di v'' sarà

$$V''=\frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L\sqrt{2H''}}.$$

14. Da queste considerazioni fatte sulle quantità v' e v'', fra le quali per uno stesso valore di H è sempre compresa la velocità media v della corrente, si può conchiudere, che siccome esse quantità hanno un massimo quando esistono certe relazioni tra D ed a; così avrà pure un massimo la velocità v, quando esisteranno analoghe relazioni tra D ed a. Ma il valore di H che renderà v massimo non sarà sempre compreso tra i valori di H' ed H'', che rendono rispettivamente massime le

quantità v' e v'', dipendendo ciò dalle relazioni che esisteranno tra D ed a.

Così nel caso di luce assai piccola a confronto della sezione del canale si è trovato (n.° 7.) che il valore di H che rende massima la velocità v, è

$$H = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}} :$$

In questo stesso caso, trascurando nelle espressioni di v' e di v'' la quantità $\frac{\mu al}{L}$, i valori di H che rendono rispettivamente v' e v'' massimi, sono

$$H' = 2D + a ; \quad H'' = 2D + \frac{10a}{9}.$$

Ora si trova che è bensì, qualunque sia la relazione tra D ed a,

$$2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}} > 2D + a ;$$

ma non è

$$2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}} < 2D + \frac{10a}{9}$$

se non quando $D > \frac{2a}{9}$.

Ciò non ostante si scorge che il valore di H, che rende v massimo, sarà in generale assai poco diverso dall' uno o dall' altro dei valori di H' e H'' del n.° 13. Se poi non esistono tra D ed a relazioni analoghe alle sovra espresse, allora la velocità media v diminuirà sempre, crescendo l' altezza dell' acqua nel canale.

15. L' efflusso dalla luce sin quì considerata non sia più libero, ma si faccia tutto in acqua stagnante, e di superficie invariabile, come sarebbe quella di un ampio lago; e sia k l' altezza della superficie dell' acqua stagnante sopra il lato superiore della luce, e b l' altezza della superficie dell'acqua nel canale sopra quella dell' acqua stagnante, in modo che

ritenendo le altre denominazioni precedentemente adoperate, si abbia

$$H = D + a + k + b,$$

e non possa mai essere

$$H < D + a + k,$$

D, a e k essendo quantità costanti. Per le cose precedenti, qualunque sia la grandezza della luce rispetto alla sezione del canale, la portata della luce, e quella del canale, eguali tra loro, saranno date dalle equazioni

$$Q = \mu al.\sqrt{2g\left(b + \frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)};$$

$$Q = HLv;$$

dalle quali si ricava

$$v = \mu al\sqrt{2g}.\frac{\sqrt{H-D-k-a}}{\sqrt{H^2L^2-\mu^2a^2l^2}}.$$

Questo valore di v è della stessa forma di quelli di v' e di v'' esaminati al n.° 12: Perciò quando H sarà grandissimo a paragone di D, k ed a, si avrà

$$v = \frac{\mu al\sqrt{2g}}{L\sqrt{H}}.$$

La velocità media v sarà massima, allorchè

$$H = D + a + k + \sqrt{(D+a+k)^2 - \frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}}.$$

E se la luce è assai piccola rispetto alla sezione del canale, la massima velocità media corrisponderà allo stato permanente in cui è

$$H = 2(D + a + k).$$

16. Ritenendo lo sbocco ora considerato, supponiamo che ad una conveniente distanza dal medesimo si chiuda la sezione del canale con un piano solido, in cui sia intagliata una luce, dalla quale l'efflusso si faccia anch' esso tutto nell' acqua; e così mediante questa luce l' acqua passi dal tronco supe-

riore del canale nel tronco compreso tra questa luce e lo sbocco. Conservando le denominazioni precedenti circa lo sbocco e l' ultimo tronco del canale, chiamiamo D', a', k', b' ed H' le analoghe quantità relative alla luce ed al tronco superiore del canale, cosicchè si abbia

$$H' = D' + a' + k' + b'.$$

Queste quantità, come pure le corrispondenti relative allo sbocco, sono costanti quando lo stato del canale è permanente; ma le quantità b, k' e b', e quindi H ed H' variano da uno stato permanente ad un altro.

Chiamiamo E^2 l'area della luce dello sbocco, ed E'^2 quella dell' altra luce, comprendendo in queste espressioni la contrazione della vena fluida; e consideriamo il caso in cui queste luci sono assai piccole a paragone delle sezioni dell' uno e dell' altro tronco del canale.

Essendo Q la portata del canale e di ciascuna delle luci; v la velocità media del tronco del canale compreso tra le due luci; v' la velocità media del tronco superiore, si avrà

$$Q = E^2\sqrt{2gb} = E'^2\sqrt{2gb};$$
$$Q = HLv \quad = H'L'v';$$
$$v = \frac{E^2\sqrt{2gb}}{HL}; \quad v' = \frac{E'^2\sqrt{2gb'}}{H'L'};$$

e facendo $D + a + k = M$, essendo M quantità costante in qualunque stato permanente del canale, sarà

$$b = H - M; \quad b' = H' - H;$$

e poichè $E^2\sqrt{b} = E'^2\sqrt{b'}$, si troverà

$$H = \frac{E'^4H' + E^4M}{E'^4 + E^4};$$

e quindi

$$H - M = \frac{E'^4(H' - M)}{E'^4 + E^4}; \quad H' - H = \frac{E^4(H' - M)}{E'^4 + E^4};$$

e finalmente

$$v = \frac{E^2E'^2\sqrt{E'^4 + E^4}\sqrt{2g(H' - M)}}{L(E'^4H' + E^4M)};$$

$$v' = \frac{E^2E'^2\sqrt{2g(H'-M)}}{H'L\sqrt{E'^4+E^4}}.$$

Se ora si cerca il valore di H' affinchè v e v' siano massimi, si trova che v è massimo quando

$$H' = 2M + \frac{F^4}{E'^4}M;$$

e che v' è massimo quando

$$H' = 2M:$$

perciò quando la velocità media è massima nel tronco superiore, non lo è nel tronco successivo.

17. Oltre lo sbocco, supposto invariabile, e la luce ora considerata, si concepisca un'altra luce posta attraverso il canale ed a superiore e conveniente distanza da quella già esistente, in modo che il canale sia diviso in tre tronchi: indichiamo colle stesse lettere segnate con due accenti le quantità relative alla nuova luce ed al tronco superiore del canale; e siano le luci costituite in modo che l' efflusso da ciascuna di esse si faccia tutto nell' acqua: fatte le opportune riduzioni, ed espressa la velocità media di ciascun tronco per l' altezza H'' del tronco superiore avremo

$$v = \frac{E^2E'^2E''^2.P^4.\sqrt{2g(H''-M)}}{L[E'^4E''^4H''+E^4(E'^4+E''^4)M]};$$

$$v' = \frac{E^2E'^2E''^2.P^4.\sqrt{2g(H''-M)}}{L[E''^4(E'^4+E^4)H''+E^4E'^4M]};$$

$$v'' = \frac{E^2E'^2E''^2.\sqrt{2g(H''-M)}}{P^4.H''L};$$

ove $P^4 = \sqrt{E^4E'^4 + E^4E''^4 + E'^4E''^4}$, ed $M = D + a + k$.
Affinchè v, v' e v'' sieno rispettivamente massimi, dovrà essere

$$\text{per } v \ldots\ H'' = 2M + \frac{F^4(E'^4+E''^4)M}{E'^4E''^4};$$

$$\text{per } v' \ldots\ H'' = 2M + \frac{E^4E'^4M}{E''^4(E^4+E'^4)};$$

$$\text{per } v'' \ldots H'' = 2M.$$

Dal che si vede che per avere nel tronco superiore la massima velocità v'', si richiede un' altezza d'acqua H'' minore di quella che è necessaria per render massima la velocità media negli altri successivi tronchi del canale. Così pure per render massima la velocità v' del secondo tronco, si richiede un' altezza H'' minore di quella che rende massima la velocità v dell' ultimo tronco. Si vede ancora che l' altezza $H'' = 2M$ che rende massima la velocità v'' del tronco superiore non dipende se non dalla quantità $D + a + k$ relativa allo sbocco. Ma affinchè il valore $H'' = 2M$ soddisfaccia alla condizione che l'altezza di ciascuna luce rimanga tutta sotto la superficie dell' acqua contenuta nel successivo tronco del canale, si deve osservare che le altezze dell' acqua nei tre tronchi sono

$$H'' = 2M;$$

$$H' = 2M - \frac{E^4E'^4M}{P^8};$$

$$H = 2M - \frac{E'^4E''^4M}{P^8};$$

e che perciò dovrà essere

$$H > M, \text{ ed anche } > D' + a'$$

$$H' > H, \text{ ed anche } > D'' + a'';$$

cioè dovranno venir soddisfatte le condizioni seguenti

$$M > \frac{D' + a'}{2 - \frac{E'^4E''^4}{P^8}}; \quad E''^2 > E^2; \quad M > \frac{D'' + a''}{2 - \frac{E'^4E^4}{P^8}}.$$

18. Consideriamo finalmente il caso in cui lo sbocco è formato da uno stramazzo, ossia da una luce rettangola e verticale, la cui larghezza può essere eguale a quella del canale, o minore della medesima, ma la cui altezza è indefinita in modo che non vi è mai battente sopra l'altezza effettiva dell' acqua che sbocca. In questo caso la superficie della corrente

all' avvicinarsi allo sbocco s' incurva e s' abbassa più o meno secondo la larghezza della luce e l' altezza della medesima occupata dall' acqua. Ma la portata (1) della luce è in ogni caso eguale a quella che si ottiene dalla formula ordinaria per le luci rettangole e verticali, nella quale si faccia zero il battente, e si prenda per l' altezza della luce quella a cui ascende l' acqua nel ramo verticale di un tubo munito di un ramo orizzontale, la cui apertura è immersa nell' acqua che passa dalla luce e ne è direttamente imboccata, contando quest' altezza dalla base ossia dal lato inferiore della luce.

L' acqua poi nel ramo verticale di questo tubo s' alza in ogni caso sensibilmente allo stesso piano della superficie dell' acqua nel canale, presa a conveniente distanza dalla luce, cioè al di sopra della chiamata sensibile dello sbocco, la quale superficie può aversi per orizzontale per tutta la rimanente parte superiore del canale. Questa osservazione e questa regola si possono estendere a tutte le luci senza battente stabilite attraverso a canali orizzontali assai lunghi.

Ciò posto sia l la larghezza della luce, ed a l'altezza alla quale salirebbe l' acqua nel ramo verticale del tubo; la portata, supposto libero l' efflusso, sarà

$$Q = \frac{2}{3} \mu a l \sqrt{2ag} :$$

e per le sezioni del canale prese a conveniente distanza dallo sbocco, e tali che le altezze loro siano sensibilmente eguali tra loro, si avrà

$$Q = H L v,$$

H essendo l' altezza di queste sezioni, e v la loro velocità media: inoltre essendo D l' altezza dello stramazzo, ossia del lato inferiore della luce sopra il fondo del canale, si avrà per ciò che precede,

(1) Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino Tom. XXVIII. pag. 285. Classe di Scienze fisiche e matematiche.

$$D + a = H;$$

e quindi

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}\,(H-D)^{\frac{3}{2}}}{3HL};$$

$$Q = \frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}.(H-D)^{\frac{3}{2}}.$$

Queste equazioni esprimono la legge, con cui la velocità media e la portata del canale variano da uno stato permanente all' altro. La velocità v è minima quando $H = D$, e cresce crescendo H, cosicchè quando H è assai grande a confronto di D, si ha

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g\,H}}{3L}; \qquad Q = \frac{2\mu l H\sqrt{2g\,H}}{3}.$$

Perciò negli stati permanenti, ne' quali l' altezza della corrente è assai grande rispetto alla quantità D, le velocità medie sono proporzionali alle radici delle altezze, ed i quadrati delle portate sono come i cubi delle medesime altezze.

Se $D=0$, queste relazioni sono vere qualunque sia l'altezza dell' acqua nel canale. E siccome nella precedente espressione di v relativa a questo caso, la ragione $\frac{l}{L}$ può avere qualunque valore compreso tra lo zero e l' unità, ne segue che l' equazione tra la velocità media e la radice dell' altezza sussiste anche quando le velocità medie sono per quanto si voglia piccole. Questa relazione tra le velocità medie e le radici delle altezze, la quale è conforme alla nota regola generalmente proposta dal celebre Domenico Guglielmini, si deduce pure dalla teoria del moto uniforme dell' acqua negli alvei inclinati, nel quale si ha riguardo alla resistenza: ma in questa teoria il moto della corrente deve essere assai rapi-

do per poterne ottenere una simile relazione (1). Laddove nel caso del canale orizzontale e dello sbocco da noi contemplato la velocità dell' acqua nel canale può essere picciolissima, e la relazione tra questa e l' altezza è indipendente dalla legge della resistenza.

19. Sin quì abbiamo considerato la luce, che serve di sbocco al canale, di figura rettangola. Sia ora questa luce un triangolo isoscele verticale, indefinitamente aperto all' insù co suoi due lati, e col vertice posto sul fondo ed alla metà della larghezza del canale. Dal vertice s' alzi una verticale, e sia m l' angolo che essa fa col lato del triangolo, e consideriamo l' efflusso da questo triangolo senza battente ed a libera caduta.

Chiamando H l' altezza dell' acqua nel canale, presa a conveniente distanza dallo sbocco, e dove la superficie della corrente è sensibilmente orrizzontale, la portata della luce, per ciò che si è osservato al n.° 18. sarà

$$Q=\frac{8\mu}{15}.\,\text{tang.}\,m.\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H};$$

e questo valore varrà da $H=0$ sino ad $H=\frac{L}{2\,tang.m}$, come si può facilmente vedere, L essendo la larghezza del canale. Si ha ancora

$$Q=HLv:$$

pertanto

$$v=\frac{8\mu.\text{tang.}m\sqrt{2g}.H\sqrt{H}}{15L}.$$

Perciò con questo sbocco, ne' diversi stati permanenti del canale compresi tra $H=0$ ed $H=\frac{L}{2\,tang.m}$, i quadrati delle

(1) Elementi di Meccanica e d'Idraulica di Giuseppe Venturoli. Milano 1818. vol. 2.° n.° 332.

velocità medie sono come i cubi delle altezze dell'acqua, ed i quadrati delle portate sono come le quinte potenze delle medesime altezze.

20. Consideriamo ora il caso in cui la sezione del canale è un triangolo isoscele col vertice in giù, e la luce per cui l'acqua sbocca, è parimente un triangolo isoscele col vertice in giù e posto sul fondo del canale, come nel caso del precedente n.° 19, e del qual triangolo conserveremo le denominazioni ivi adoperate. Chiamando n l'angolo che fa la verticale condotta dal vertice della sezione del canale col lato della sezione medesima, sia $n > m$. Per un' altezza H dell'acqua nel canale, presa a conveniente distanza dalla luce, la portata di questa è

$$Q = \frac{8}{15} \mu \, \text{tang.} m . \sqrt{2g} . H^2 \sqrt{H};$$

e la portata del canale essendo

$$Q = H^2 v . \, tang. \, n,$$

si ricava

$$v = \frac{8 \mu \, \text{tang.} m . \sqrt{2g} \sqrt{H}}{15 \, \text{tang.} n}.$$

Pertanto in tutti gli stati permanenti del canale le velocità medie sono tra loro come le radici delle altezze, ed i quadrati delle portate sono tra loro come le medesime altezze innalzate alla quinta potenza.

21. Le relazioni tra le velocità medie, le portate e le altezze dell'acqua nel canale possono esprimersi analiticamente in un modo assai semplice e generale, qualunque sia la figura della sezione del canale, e quella della luce per cui l'acqua sbocca. Ed affinchè l'efflusso dello sbocco sia unicamente dovuto alla pressione, facciamo terminare il canale in una vasca assai ampia di figura qualunque che per maggiore semplicità supporremo rettangola. Il fondo di questa vasca sia sullo stesso piano orizzontale del fondo del canale; e si concepisca che nella parete della vasca, la quale sarebbe incontrata dall' asse del canale prolungato, venga aperta una luce vertica-

le, il cui profilo sia una curva simmetrica rispetto al suo asse verticale, e la cui apertura cominci dal fondo stesso della vasca. Parimente il profilo della sezione del canale sia una curva qualunque simmetrica rispetto alla verticale, che divide per metà la sezione.

Ciò posto, ridotto il movimento in istato di permanenza, supponiamo che la superficie dell' acqua sia e si conservi, ne' diversi stati permanenti, allo stesso livello di quella della vasca, l' una e l' altra essendo orizzontali: e siccome la sezione della vasca può farsi grandissima rispetto alla luce aperta nella sua parete, l' efflusso dalla luce sarà dovuto alla sola pressione.

Sia H l' altezza dell' acqua sopra il fondo del canale e della vasca, ed

$$y = f . x$$

l' equazione del profilo della luce, essendo f una funzione qualunque delle ascisse x, prese sull' asse verticale del profilo, coll' origine sul piano orizzontale del fondo del canale e della vasca, supposto fisso ed invariabile nella sua posizione. L' efflusso essendo libero, e la luce senza battente, la portata sarà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g} . \int y dx \sqrt{H - x},$$

l' integrale dovendo prendersi da $x = 0$ sino ad $x = H$. Nell' istesso modo sia

$$Y = F.H$$

l' equazione del profilo della sezione del canale, simmetrico intorno all' asse delle H, l' origine delle quali è sul fondo del canale. Chiamando v la velocità media della corrente, la portata del canale sarà

$$Q = 2v . \int Y dH,$$

l' integrale essendo preso da $H = 0$ sino ad $H = H$. Da questi valori di Q si deduce

$$\text{(F)} \qquad v = \mu\sqrt{2g} . \frac{\int y dx \sqrt{H - x}}{\int Y dH},$$

i limiti degli integrali essendo $x=0$, $x=H$, ed $H=0$, $H=H$. Date le equazioni dei profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale, gli integrali contenuti nella equazione (F) saranno funzioni determinate di H, e perciò questa equazione darà la relazione tra la velocità media della corrente e l' altezza dell' acqua nei diversi stati permanenti del canale.

22. Ma quì, data la luce dello sbocco, noi ci serviremo dell' equazione (F) per determinare il profilo della sezione del canale in modo che esista una relazione data tra la velocità media e l' altezza della corrente. Poichè si conosce la luce dello sbocco, la portata

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}.\int y dx \sqrt{H-x}$$

sarà una funzione nota di H, che chiameremo $\Psi.H$, cosicchè sia

$$Q = \Psi.H.$$

Se adesso deve essere $v = \phi.H$, essendo ϕ una funzione data di H, l' equazione (F) diventerà

$$v = \phi.H = \frac{\Psi.H}{2\int Y dH}.$$

Da questa equazione, ricavato il valore di $\int Y dH$, e presone il differenziale rispetto ad H, si ottiene

$$Y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi}\cdot\frac{d\Psi}{dH} - \frac{\Psi}{\phi^2}\cdot\frac{d\phi}{dH}\right];$$

e questa sarà la cercata equazione del profilo della sezione del canale.

Sia, per primo esempio, la luce dello sbocco un rettangolo verticale della larghezza $2l$, indefinitamente aperto all' insu, cosicchè sia $y = l$, e si domandi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia costante ed $=$ V in qualunque stato permanente del canale. Si avrà

$$Q = \Psi.H = \frac{4\mu l\sqrt{2g}.H\sqrt{H}}{3};$$

$$v = \varphi.H = V = \text{cost.}$$

e quindi

$$Y = \frac{\mu l \sqrt{2g}.\sqrt{H}}{V}.$$

Questà equazione che è quella di una parabola col vertice in giù, darà il profilo della sezione del canale, mediante il quale in qualunque stato permanente del medesimo la velocità media rimarrà costante. È chiaro che questa velocità sarà sempre la stessa, qualunque sia H, purchè maggiore dello zero; poichè si vede ehe quando $H = 0$, la portata del canale e della luce svaniscono, e più non sussiste l' equazione (F), non potendo esservi velocità dove non vi è corrente.

Quindi nel caso presente la velocità media v è una tale funzione di H, che essa non ha valore alcuno quando $H=0$, ed ha un valore costante ed $= V$ quando $H > 0$, qualunque sia il valore di H. Si trovano non rari esempj di funzioni di simile natura nell' analisi e nelle sue applicazioni alla Fisica.

Per secondo esempio sia la luce dello sbocco un triangolo isoscele col vertice in giù; sarà l' equazione del suo profilo

$$y = x.\text{tang}.m,$$

essendo m l' angolo formato dalla verticale, che passa pel vertice, col lato del triangolo. Si avrà quindi

$$Q = \Psi.H = \frac{8}{15}\mu\text{tang}.m.\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H};$$

$$v = \varphi.H = \frac{4\mu\text{tang}.m\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H}}{15\int YdH}.$$

Se ora si vuole che questa velocità media sia sempre proporzionale all' altezza H, si farà

$$v = \varphi.H = BH,$$

essendo B un coefficiente dato e costante. Da questi valori si otterrà

$$Y = \frac{2\mu\text{tang}\, m\sqrt{2g}.\sqrt{H}}{5.B}.$$

per l' equazione del profilo della sezione del canale; il quale è una parabola col vertice in giù.

Se in questo stesso caso della luce triangolare si cerca qual debba essere il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia costante ed $= V$, si troverà per l' equazione del cercato profilo

$$Y = \frac{2\mu \tan m \sqrt{2g}.H\sqrt{H}}{3V}.$$

Sia, per terzo esempio,

$$y = Ax^2$$

l' equazione del profilo della luce dello sbocco, essendo A una quantità data e costante, e si cerchi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media di questa sia espressa dall' equazione

$$v = BH^n,$$

ove B è un coefficiente dato e costante, ed n è un esponente costante indeterminato. Si avrà

$$Q = \Psi.H = \frac{32A\mu\sqrt{2g}\,H^3\sqrt{H}}{105};$$

$$v = \varphi.H = BH^n;$$

e quindi

$$Y = \frac{8(7-2n).A\mu\sqrt{2g}.H^{\frac{5}{2}-n}}{105.B}$$

sarà la cercata equazione del profilo della sezione del canale.

Da questa espressione di Y si vede che l' esponente n può avere qualunque valore negativo, e tutti i valori positivi non maggiori di $\frac{5}{2}$ senza che il valore di Y diventi infinito quando è $H = 0$: perciò per tutti questi valori il fondo del canale avrà una larghezza finita.

Posti pertanto per n i valori $-\frac{1}{2}$; -1; -2; ec. si avranno le equazioni

$$v = \frac{B}{\sqrt{H}}; \quad Y = \frac{64.A\mu\sqrt{2g}.H^3}{105.B}:$$

$$v = \frac{B}{H}; \quad Y = \frac{24.A.\mu\sqrt{2g}.H^3\sqrt{H}}{35.B}.$$

$$v = \frac{B}{H^2}; \quad Y = \frac{88.A.\mu\sqrt{2g}.H^4\sqrt{H}}{105.B};$$

ecc.

E prendendo per n i valori positivi $0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$, si hanno le equazioni

$$v = B = \text{cost.}; \quad Y = \frac{56\ A.\mu\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H}}{105.B}:$$

$$v = B\sqrt{H}; \qquad Y = \frac{24.A.\mu\sqrt{2g}.H^2}{35.B}:$$

$$v = BH; \qquad Y = \frac{40.A\mu\sqrt{2g}.H\sqrt{H}}{105.B}:$$

$$v = BH\sqrt{H}; \qquad Y = \frac{32.A.\mu\sqrt{2g}.H}{105.B}:$$

$$v = BH^2; \qquad Y = \frac{8.A\mu\sqrt{2g}\sqrt{H}}{35.B}:$$

$$v = BH^2\sqrt{H}; \quad Y = \frac{16.A\mu\sqrt{2g}}{105.B}.$$

Per tutti questi valori la portata del canale è sempre data dall' equazione

$$Q = \frac{32.A\mu\sqrt{2g}.H^3\sqrt{H}}{105}.$$

23. Questi esempj bastano per dimostrare come nei canali orizzontali le relazioni della velocità media e della portata all' altezza siano diverse ne' diversi canali secondo i profili delle sezioni de' canali, e quelli delle aperture che servono di sbocco alle acque. Si vede ancora che per un medesimo canale queste relazioni possono rimanere le stesse tra certi limiti dell' altezza dell' acqua, e poi essere diverse quando

l' altezza non è più compresa tra quei limiti. E queste variazioni possono moltiplicarsi indefinitamente in un medesimo canale, poichè esse dipendono dai profili della sezione del canale, e della luce dello sbocco, i quali possono avere una forma qualunque soggetta o no alla legge di continuità.

Così se la sezione è un rettangolo verticale, e la luce dello sbocco è pure un rettangolo verticale, la cui larghezza è l, ed a l' altezza, ed il cui lato inferiore è sul fondo stesso del canale, si è veduto (n.° 18) che essendo libero lo sbocco, si ha da $H = 0$ sino ad $H = a$,

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2gH}}{3L};$$

ove H è l' altezza, ed L la larghezza della sezione dell' acqua nel canale. Quando poi l' altezza H cresce, e forma un battente $b = H - a$ sopra il lato superiore della luce dello sbocco, si ha (n.° 6)

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.\left[H^{\frac{3}{2}} - (H-a)^{\frac{3}{2}}\right]}{3HL}$$

e finalmente quando H è grandissimo rispetto ad a, si ha (n.° 8)

$$v = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{L\sqrt{H}}.$$

Dalle quali espressioni si vede che ne' diversi stati permanenti del canale la ragione della velocità media all' altezza segue in questo caso leggi assai diverse tra loro.

Sia, per altro esempio, la luce dello sbocco un rettangolo verticale della larghezza l, col lato inferiore sul fondo del canale, ed indefinitamente aperto all' insù. La sezione del canale sia un trapezio, la cui larghezza, o base minore, posta sul fondo, si dica L, l' altezza H', ed n' l' angolo del suo lato colla verticale. Sopra questo trapezio ne esista un altro, la cui base inferiore e minore sia $L + 2H'\text{tang}.n' + 2\lambda$, es-

sendo λ una quantità data, H'' ne sia l'altezza, ed n'' l'angolo del suo lato colla verticale. È facile il vedere, che quando l'altezza dell'acqua nel canale è compresa tra $H=o$ ed $H=H'$, si ha per la velocità media della corrente nel canale

$$v=\frac{2\mu l\sqrt{2g}.\sqrt{H}}{3[L+H\tan g.n']}.$$

Quando poi l'altezza dell'acqua sarà compresa tra $H=H'$, ed $H=H''$, si avrà

$$v=\frac{2\mu l\sqrt{2g}(H'+h)^{\frac{3}{2}}}{3[H'(L+H'\tan g.n')+h(L+2H'\tan g.n'+h\tan g.n''+2\lambda)]}$$

e questa equazione varrà da $h=o$ sino ad $h=H''$.

24. In generale sia la luce dello sbocco indefinitamente aperta all'insù, e formata da una serie di curve diverse l'una dall'altra, le quali, per maggiore semplicità, supporremo simmetriche rispetto ad un asse comune verticale, che divide per metà la luce; e siano le equazioni di queste curve

$$y'=f'.x';\ y''=f'.x'';\ y'''=f'''.x''', \dots$$

$f', f'', f'''\dots$ essendo funzioni date delle rispettive ascisse x', x'', $x'''\dots$ prese sull'asse verticale; e sia H l'altezza qualunque dell'acqua nel canale. Inoltre per la prima curva le ascisse x' comincino dal fondo del canale, al cui piano comincia pure l'apertura dello sbocco, ed il valore di y' valga da $x'=o$ sino ad $x'=h'$; per la seconda curva sia $x'=o$ quando $x'=h'$, e valga il valore di y'' da $x''=o$ sino ad $x''=h''$; per la terza curva sia $x'''=o$ quando $x''=h''$, ed il valore di y''' valga da $x'''=o$ sino ad $x'''=h'''$; e così di seguito. Sarà la portata della luce

$$Q=2\mu\sqrt{2g}\left[\int_0^{h'}y'dx'\sqrt{H-x'}+\int_0^{h''}y''dx''\sqrt{H-h'-x''}\right.$$
$$\left.+\int_0^{h'''}y'''dx'''\sqrt{H-h'-h''-x'''}+\dots\dots\right];$$

ove $\int_0^{h'}$ indica l'integrale preso da $x'=o$ sino ad $x'=h'$.

Similmente il profilo della sezione del canale sia formato dalla serie delle curve

$$Y'=F'.\,z'\,;\ Y''=F''.\,z''\,;\ Y'''=F'''.\,z'''\,;\ldots\ldots$$

cosicchè per la prima curva, principiando le z' dal fondo, l'ordinata Y' valga da $z'=0$ sino a $z'=H'$; per la seconda curva, essendo $z''=0$ quando $z'=H'$, l'ordinata Y'' valga da $z''=0$ sino a $z''=H''$, e così di seguito, H', H'',... essendo le rispettive altezze delle curve, simmetriche rispetto all'asse verticale delle z che divide per metà la sezione del canale. Si avrà per la portata della sezione

$$Q=2v.\left[\int_0^{H'}Y'dz'+\int_0^{H''}Y''d\,z''+\int_0^{H'''}Y'''dz'''+\ldots\right].$$

E quindi

$$\text{(G)}\quad v=\frac{\mu\sqrt{2g}\left[\int_0^{h'}y'dx'\sqrt{H-x'}+\int_0^{h''}y''dx''\sqrt{H-h'-x''}+\ldots\right]}{\int_0^{H'}Y'dz'+\int_0^{H''}Y''dz''+\ldots}.$$

E siccome l'altezza totale H della corrente è data, si saprà in ogni caso sino a che curva ed a che ascissa della medesima arriverà la superficie dell'acqua nel profilo della luce e nel profilo della sezione, e perciò sarà noto il numero degli integrali che si dovranno prendere nell'espressione di v, e saranno determinati i limiti degli integrali estremi.

25. Nel dedurre l'equazione (F) (n.° 21.) la quale dà il valore della velocità media della corrente nel canale in funzioni dell'altezza H, noi abbiamo supposto che in qualunque stato permanente la superficie dell'acqua nel canale si componga allo stesso livello della superficie dell'acqua nella vasca ove termina il canale, e nella cui parete è aperto lo sbocco. L'eguaglianza di questi due livelli può essere vera o assai prossima al vero, quando la corrente nel canale non ha velocità molto grande. Ma quando questa è considerabile, l'osservazione mostra che il livello dell'acqua nella vasca si tiene più alto del livello della superficie della corrente nel canale. Siccome però la differenza di questi livelli è in gene-

rale una funzione della velocità stessa della corrente nel canale, è chiaro che quando sia nota questa funzione, si otterrà facilmente una equazione analoga alla (F), la quale servirà alle stesse determinazioni per le quali si è adoperata quest' ultima.

Infatti sia H l' altezza della corrente nel canale, ed $H+h$ l' altezza dell' acqua nella vasca, sarà $H+h$ l' altezza dalla quale dipende l' efflusso dalla luce dello sbocco. Perciò ritenendo le altre denominazioni del n.° 21, si avrà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}.\int y dx \sqrt{H + h - x},$$

l' integrale dovendo prendersi da $x = 0$ sino ad $x = H + h$, la portata del canale sarà

$$Q = 2v \int Y dH,$$

i limiti di questo integrale essendo $H = 0$, $H = H$. Quindi ne viene

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}.\int y dx \sqrt{H+h-x}}{\int Y dH}.$$

Ora qualunque sia il valore di h in funzione di v, l' integrale $\int y dx \sqrt{H+h-x}$, in cui questa funzione è costante, si potrà sempre ottenere, data la y in x. Sia dunque

$$\int_0^{H+h} y dx \sqrt{H+h-x} = \Psi(H+h),$$

essendo Ψ una funzione nota di $H+h$; sarà

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(H+h)}{\int Y dH}.$$

Ma è $h = \Pi.v$, Π essendo una funzione data; pertanto

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}\Psi(H+\Pi.v)}{\int Y dH}.$$

Se adesso si cerca qual debba essere il profilo $Y = F.H$ della sezione del canale, affinchè la velocità media v sia eguale ad una data funzione $\phi.H$ dell' altezza dell' acqua nel canale, si avrà l' equazione

$$v = \phi.\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(\mathrm{H}+\Pi.v)}{\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}}.$$

ossia, poichè $\Pi.v = \Pi(\phi\mathrm{H}) = \Theta.\mathrm{H}$, essendo Θ una funzione nota, sarà

$$v = \phi.\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(\mathrm{H}+\Theta.\mathrm{H})}{\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}};$$

cioè

$$\int \mathrm{Y}d\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}\Psi(\mathrm{H}+\Theta.\mathrm{H})}{\phi.\mathrm{H}};$$

la quale espressione differenziata rispetto ad H, darà il cercato profilo $\mathrm{Y} = \mathrm{F.H}$ affinchè sia $v = \phi.\mathrm{H}$. Per modo d'esempio sia $y = l$ l'equazione del profilo della luce dello sbocco, l essendo costante; e prendasi $h = \Pi.v = mv^2$, funzione conforme alla teoria ed indicata dalle osservazioni, m essendo un coefficiente costante; e sia finalmente $\phi.\mathrm{H} = v = p.\sqrt{\mathrm{H}}$, ove p è un coefficiente costante: si troverà pel profilo della sezione del canale l'equazione

$$\mathrm{Y} = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.(1+mp^2)^{\frac{3}{2}}}{3p};$$

Cioè la sezione sarà un rettangolo la cui larghezza sarà doppia di questo valore di Y. Se si trascura l'altezza h rispetto ad H; cioè se si fa $m = 0$, la sezione del canale sarà ancora un rettangolo la cui larghezza sarà $\frac{4\mu l\sqrt{2g}}{3p}$.

Conservando lo stesso profilo della luce dello sbocco, e l'istesso valore di h in v, si cerchi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia sempre costante ed $=$ V: si arriverà all'equazione

$$\int \mathrm{Y}d\mathrm{H} = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.(\mathrm{H}+m\mathrm{V}^2)^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{V}},$$

dalla quale si ricava

$$Y = \frac{\mu l\sqrt{2g}\sqrt{H + mV^2}}{V},$$

equazione di una parabola, il cui vertice è all' ingiù e sotto il piano del fondo del canale, e la cui ordinata, quando $H = 0$, cioè al fondo del canale, è $= \mu l\sqrt{2gm}$. Se $m = 0$, si avrà la parabola trovata al n.° 22.

26. Ciò che si è detto sin quì sui canali orizzontali, è visibilmente applicabile a que' tratti dei canali inclinati, nei quali le acque, nei diversi stati permanenti che si considerano, rimangono rigurgitate, e colla superficie superiore sensibilmente orizzontale.

Infatti sia ω l' angolo che fa la direzione del fondo del canale coll' orizzonte, e supponiamo che si chiuda il canale con un piano solido verticale, in cui sia praticata un' apertura rettangola e verticale. Si chiami l la larghezza di questa apertura, e sia $l < L$, essendo L la larghezza del canale, il quale si suppone di sponde verticali e parallele tra loro. Siccome l' apertura per cui deve passare tutta la portata del canale, è minore della sezione del medesimo, la corrente soffrirà un rigurgito, il quale si estenderà all' insù per un certo tratto, costante per uno stesso stato permanente del canale, e variabile da uno stato all' altro. Inoltre la superficie dell' acqua nel tratto del rigurgito si comporrà in un piano sensibilmente orizzontale, al quale si accosterà sempre più a misura che l' area dell' apertura sarà più piccola a paragone della sezione naturale della corrente.

Ciò posto, chiamando a l' altezza della superficie orizzontale dell' acqua sopra il lato inferiore dell'apertura, il quale coincide col fondo stesso del canale al sito ove essa apertura è stabilita, sarà la portata dell' apertura, ridotto il moto a stato di permanenza, e supposto libero l' efflusso,

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}.\ a\sqrt{a}.$$

Se ora si considera una sezione del canale presa nel tratto in

cui le acque sono rigurgitate, e posta alla distanza orizzontale E dall'apertura, e si chiama H l'altezza dell'acqua in questa sezione, si vedrà essere

$$H + E \text{ tang. } \omega = a ;$$

e perciò

$$Q = \frac{2}{3} \mu l \sqrt{2g} . (H + E. \text{ tang.} \omega)^{\frac{3}{2}} .$$

Ma si ha pure, nella sezione che si considera,

$$Q = HLv :$$

Pertanto l' equazione

$$v = \frac{2\mu l \sqrt{2g} \, [H + E.\text{tang.}\omega]^{\frac{3}{2}}}{3HL} .$$

esprimerà la relazione tra la velocità media e l'altezza dell' acqua nella sezione posta alla distanza E dall'apertura. Questa relazione però non sussisterà più quando sarà $H = o$, e quando, nello stato permanente che si considererà, quella sezione non sarà più compresa nel tratto per cui si estende il rigurgito. Si vede ancora che nella stessa sezione la velocità media sarà minima, quando si avrà

$$H = 2E. \text{ tang.} \omega ;$$

purchè per questo valore di H la sezione rimanga nel tratto occupato dal rigurgito.

27. Nelle applicazioni dell'equazione

$$\text{(F)} \qquad v = \mu \sqrt{2g} . \frac{\int y dx \sqrt{H - x}}{\int Y dH}$$

esposte al n.° 22. ci siamo limitati alla ricerca del profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia eguale ad una funzione data dell' altezza dell'acqua, supponendo dato il profilo della luce dello sbocco, che è quanto dire, supponendo data la portata del canale in funzione dell'altezza dell' acqua.

Ma si può proporre una ricerca più generale, quale è quella di determinare i profili della sezione del canale, e della luce dello sbocco, affinchè la velocità media, e la portata della sezione siano, ne' diversi stati permanenti del canale, rispettivamente eguali a funzioni date dell'attezza dell'acqua. A questa ricerca più non serve l'equazione (F). Infatti nel formare questa equazione (n.° 21.) si è preso per piano invariabile e fisso il piano orizzontale che passa pel fondo del canale: le ascisse delle curve che rappresentano i profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale, hanno la loro origine su questo piano, e crescono positivamente dal basso all'alto verso la superficie della corrente, il cui piano, sempre parallelo a quello del fondo, è più o meno distante dal medesimo secondo le varie altezze dell'acqua nel canale.

La pressione poi cui è dovuta la velocità dell' efflusso dalla luce dello sbocco, ha necessariamente l' origine alla superficie suprema dell'acqua, e cresce positivamente dall'alto al basso verso il fondo del canale. Quindi è che, quantunque le equazioni dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale abbiano l' origine sul piano fisso del fondo, e per ascisse le altezze dell'acqua sopra questo piano, e perciò le ordinate y ed Y siano funzioni delle altezze H; tuttavia nell' equazione del profilo della luce dello sbocco si è dovuto introdurre la variabile ausiliare x, la quale, presa sull'asse delle ascisse H, serve unicamente ad esprimere la velocità $\sqrt{2g(\mathrm{H}-x)}$ di un elemento qualunque $2ydx$ della luce posto all' altezza x dal fondo, ossia alla profondità $\mathrm{H}-x$ sotto la superficie dell' acqua: data poi la funzione y in x, e fatta l' integrazione del termine $\int ydx\sqrt{\mathrm{H}-x}$ da $x=0$ sino ad $x=\mathrm{H}$, la variabile x sparisce, e l' integrale si riduce ad una funzione determinata dell' altezza H.

Ora se si osserva che nell'integrare il termine $\int ydx\sqrt{\mathrm{H}-x}$ si deve riguardare H come costante sinchè non è fatta l' integrazione, e che questa non può eseguirsi se non è data la

y in x; se si osserva inoltre che lo stesso integrale rappresenta la portata della luce e del canale, e che perciò quando questa portata è data in funzione di H, converrebbe differenziare $\int y dx \sqrt{H-x}$ rispetto ad H per liberare l' ordinata y dal segno integrale, ed averne il valore in funzione di H; se si osserva finalmente che mediante questa differenziazione non verrebbe eliminato il segno integrale, il quale si riferisce alla variabile x, di cui y è funzione sinchè non è eseguita l' integrazione; si vedrà che l' equazione (F) non può servire alla determinazione dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale, affinchè la portata e la velocità media della corrente siano rispettivamente eguali a funzioni date dell' altezza H.

28. Per ottenere pertanto espressioni generali della portata e della velocità media della sezione del canale, atte a somministrare la proposta determinazione, è d' uopo che la pressione, e le coordinate dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale abbiano la stessa origine. Ora l' origine della pressione è necessariamente alla superficie superiore dell' acqua, e non si può prendere altrove: perciò il piano di questa superficie sarà l' origine comune della pressione e delle coordinate dei profili dei quali si tratta.

Preso adunque questo piano per fisso ed invariabile, la pressione e le altezze dell' acqua cresceranno dall' alto al basso, cioè dalla superficie al fondo, e noi le prenderemo positive in questa direzione. Ciò posto, e ritenuto quanto si è detto al n.° 21. circa il canale ed il modo con cui è stabilita la luce del suo sbocco, siano

$$y = f.H, \qquad Y = F.H,$$

le equazioni dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale supposti simmetrici rispetto all' asse verticale che divide per metà la sezione del canale e l' apertura dello sbocco. La portata della luce dello sbocco sarà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}.\int y dH\sqrt{H};$$

e quella della sezione del canale

$$Q = 2v\int Y dH;$$

le quali eguagliate tra loro danno

$$v = \mu\sqrt{2g}\,.\,\frac{\int y dH\sqrt{H}}{\int Y dH};$$

i limiti degli integrali in queste equazioni sono $H=0$, $H=H$.

Il piano della superficie superiore dell' acqua essendo fisso ed invariabile, converrà intendere che il fondo del canale è mobile, e che quando la profondità dell' acqua cresce, esso s' abbassi parallelamente a se stesso, restando fisso ed invariabile il piano della superficie suprema della corrente.

Si voglia ora che, qualunque sia la profondità H sotto la superficie della corrente, si abbia costantemente

$$v = \phi.H,\ Q = \Psi.H,$$

ϕ e Ψ essendo funzioni date di H. Si sostituiscano questi valori nelle precedenti espressioni di v e di Q, e si avrà

$$\int y dH\sqrt{H} = \frac{\Psi.H}{2\mu\sqrt{2g}};\qquad \int Y dH = \frac{\Psi.H}{2\phi.H}:$$

e differenziando rispetto ad H, si troveranno le equazioni dei profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale così espresse,

$$y = f.H = \frac{1}{2\mu\sqrt{2g\,H}}\,.\,\frac{d\Psi.H}{dH};$$

$$Y = F.H = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi H}\,.\,\frac{d\Psi.H}{dH} - \frac{\Psi.H}{(\phi.H)^2}\,.\,\frac{d\phi.H}{dH}\right];$$

e questi valori di y ed Y soddisfaranno alle proposte condizioni.

Sia per esempio.

$$v = \phi.H = AH,\ Q = \Psi.H = BH^2,$$

A e B essendo coefficienti costanti; si troverà

$$y = \frac{B\sqrt{H}}{\mu\sqrt{2g}};\qquad Y = \frac{B}{2A}.$$

Cioè il profilo della luce dello sbocco sarà una parabola col vertice alla superficie suprema dell' acqua, e prolungata all' ingiù co' suoi due rami sino al piano del fondo del canale. Il profilo poi della sezione del canale sarà un rettangolo della larghezza $\frac{B}{A}$. Dal che si vede che se il fondo è fisso ed invariabile di posizione, come in realtà lo è generalmente per tutti i canali, e si voglia che le proposte relazioni

$$v = AH, \; Q = BH^2,$$

si osservino costantemente ne' diversi stati permanenti di un canale di fondo orizzontale, la sezione di questo canale dovrà essere un rettangolo della larghezza $\frac{B}{A}$: la luce poi dello sbocco sarà una parabola del parametro $\frac{B^2}{2\mu^2 g}$, la posizione della quale dovrà essere variabile in modo che il vertice della medesima sia sempre alla superficie suprema dell' acqua, ed i suoi due rami diretti all' ingiù, vadano a terminare sul piano del fondo del canale. E così crescendo o calando l' acqua nel canale, si dovrà alzare od abbassare il piano della parabola in modo che il vertice di questa rimanga sempre sulla superficie superiore dell' acqua, e l' altezza dello spazio parabolico, che costituisce l' area della luce dello sbocco, sia in ogni caso eguale all' altezza dell' acqua nel canale.

Sia, per altro esempio,

$$v = \varphi . H = A\sqrt{H}; \qquad Q = \Psi . H = BH\sqrt{H}:$$

si troverà

$$y = \frac{3B}{4\mu\sqrt{2g}}; \qquad Y = \frac{B}{2A}:$$

Cioè tanto la luce dello sbocco, quanto la sezione del canale saranno figure rettangole indefinitamente aperte. Perciò in questo caso le proposte relazioni si osserveranno sempre, sia che si prenda per piano fisso quello della superficie della corrente, e per piano mobile il fondo; sia che si prenda il fondo fisso, e mobile la superficie, come si è fatto al n.° 18.

29. I metodi sin quì esposti per ottenere relazioni date tra la portata, la velocità media e l'altezza della corrente sono unicamente applicabili ai canali orizzontali: poichè nelle equazioni del movimento dell' acqua in questi canali contenendosi necessariamente l'area della luce dello sbocco, e quella della sezione della corrente nel canale, si possono riguardare come indeterminati i profili di queste aree, e determinarli quindi in modo che vengano soddisfatte le date relazioni tra la portata, l'altezza e la velocità media della corrente.

Ma se il canale è inclinato, di sezione costante e colla superficie della corrente parallela al fondo, le equazioni del moto permanente dell' acqua, avuto riguardo alla nota legge delle resistenze uniformi opposte al moto dal fondo e dalle sponde del canale, sono indipendenti dallo sbocco, e non contengono altra sezione e perimetro che quelli della corrente nel canale. Da ciò ne segue che nel caso in cui il profilo della sezione del canale inclinato è una curva continua, una sola condizione è necessaria, e basta per determinare l'area ed il perimetro della sezione. Cioè se si vuole che l'area della sezione conservi sempre una relazione data all' altezza della corrente, il profilo, e perciò anche il perimetro della medesima sarà determinato: oppure se si vuole che il perimetro soddisfaccia sempre ad una data condizione, la curva del profilo sarà determinata, e quindi anche l'area della sezione. Pertanto non si possono, pei canali inclinati, proporre e risolvere insieme i due problemi distinti, come pei canali orizzontali, di soddisfare cioè a due relazioni qualunque date tra la portata, la velocità media e l'altezza della corrente.

30. Le equazioni del moto permanente dell' acqua nel tronco del canale inclinato che quì si considera, sono (*)

(*) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj d'acque e strade l'anno 1821. Milano 1822. pag. 14 e seg.

(K) $u = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta D.\cos.\varphi}$;

(L) $Q = u \times$ sezione della corrente;

ove D è il raggio medio, ossia l'area della sezione della corrente, divisa per quella parte del suo perimetro che tocca il fondo e le sponde del canale;

φ è l'inclinazione dell'alveo alla verticale;

u la velocità media;

Q la portata;

ed è inoltre, preso il metro per unità,

$$\alpha^2 = 0,0011 \,;\; \beta = 2735,66,$$

questi numeri essendo costanti.

Ora se il profilo della sezione è formato da una curva continua e simmetrica rispetto ad un asse perpendicolare al fondo del canale, e su cui, partendo dal fondo, si misurano le altezze H della corrente, e sia

$$Y = F.H$$

l'equazione di questa curva, indicando per F una funzione qualunque, sarà l'area della sezione $2\int YdH$, integrando da $H = 0$ sino ad $H = H$, altezza della corrente.

Ma circa la parte del perimetro di questa sezione che tocca il fondo e le sponde del canale, è da notarsi che se l'equazione del profilo $Y = F.H$ è tale che quando $H = 0$ sia pure $Y = 0$, allora quella parte del perimetro sarà $2\int dH\sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}$, integrando da $H = 0$ sino ad $H = H$; e si avrà

$$D = \frac{\int YdH}{\int dH\sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}}.$$

Ma se quando $H = 0$ non si ha $Y = 0$, allora l'espressione precedente del raggio medio non serve, e si deve aggiugnere al suo denominatore il perimetro che costituisce la base inferiore ossia il fondo della sezione. Così se quando $H = 0$ si ha $Y = A$, sarà

$$D = \frac{\int Y dH}{A + \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}}.$$

Mediante queste espressioni generali della sezione e del raggio medio, le equazioni (K) ed (L) diventeranno

(M) $$\frac{\int Y dH}{A + \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = \frac{(u + \alpha)^2 - \alpha^2}{\beta . \cos . \varphi};$$

(N) $$2u \int Y dH = Q;$$

e si avranno la portata e la velocità espresse per H, quando sarà data la pendenza φ e l' equazione $Y = F.H$ del profilo della sezione.

31. Se adesso si domanda quale debba essere l'equazione $Y = F.H$ affinchè in ogni stato permanente del canale la velocità media u sia eguale ad una funzione data di H, si vede tosto che questo problema è determinato. Infatti la velocità u essendo data ed espressa per H, l' equazione (M) diventa

(P) $$\frac{\int Y dH}{A + \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = \Psi . H,$$

Ψ essendo una funzione nota di H. Questa equazione darà il cercato valore di Y, mediante il quale si otterrà dall'equazione (N)la portata Q.

In eguale maniera, data la portata Q in funzione di H, si potrà determinare il valore di Y. Poichè preso dall' equazione (N) il valore di $u = \frac{Q}{2\int Y dH}$, e sostituito nell' equazione (M), si avrà

(R) $$\frac{4(\int Y dH)^3}{A + \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = \frac{4\alpha Q \int Y dH + Q^2}{\beta . \cos . \varphi};$$

e, ricavato da questa equazione il valore di Y in H, si avrà poi dall' equazione (N) il valore di u.

Si vede pertanto che nel movimento dell' acqua nei canali inclinati il problema è determinato quando è data la velocità u in funzione di H, oppure quando è data la portata Q in funzione della stessa quantità H.

32. La determinazione del valore di Y in H per mezzo dell'equazione (P) o dell' equazione (R) sarà in generale assai difficile, e per lo più impossibile ad ottenersi sotto forma finita ed esplicita. Tralasciando quì di svolgere le equazioni (P) ed (R) e di metterle sotto forma differenziale, noi ci limiteremo ad esaminare se è possibile di assegnare alla sezione un profilo tale, che la velocità media rimanga costante in ogni stato permanente, qualunque sia l' altezza dell' acqua. È chiaro che in questo caso il raggio medio D dovrà essere una quantità costante, cioè dovrà aversi l' equazione

$$\frac{\int Y dH}{\int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = m = \text{cost.}$$

Supponendo che quando H = o, sia pure Y = o. Se poi dopo aver determinato con questa equazione il valore di Y=F.H, non potremo avere Y = o quando H = o, il proposto problema sarà impossibile.

Differenziando l' equazione precedente si ha

$$dH = \frac{m dY}{\sqrt{Y^2 - m^2}};$$

e qnindi

$$H = \text{cost.} + m \log. \left(\frac{Y + \sqrt{Y^2 - m^2}}{m} \right).$$

Ora siccome il profilo della sezione deve essere reale, è chiaro che non si può fare Y = o quando H = o; e per lo stesso motivo non può farsi $Y < m$ quando H = o. Prendiamo dunque $Y = m$ quando H = o, avremo cost. = o, e l' equazione del profilo diventerà

$$Y = \frac{m}{2} \cdot \left[e^{\frac{H}{m}} + e^{-\frac{H}{m}} \right],$$

dalla quale si ricava

$$\int Y dH = m \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}} = \frac{m^2}{2}\left(e^{\frac{H}{m}} - e^{-\frac{H}{m}} \right),$$

Ma siccome quando $H = 0$, è $Y = m = A$, ne segue che il valore del raggio medio è

$$D = \frac{\int Y dH}{A + \int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = m \left(1 - \frac{2e^{\frac{H}{m}}}{e^{\frac{2H}{m}} + 2e^{\frac{H}{m}} - 1} \right);$$

e perciò questo valore del raggio medio, rigorosamente parlando, non è costante in qualsivoglia stato permanente del canale.

Si vede però che, crescendo H, questo valore ha per limite la quantità costante m: così se è, per esempio, $H > 6m$, il coefficiente di m nel precedente valore di D non differisce dall' unità se non di una frazione minore di $\frac{1}{200}$. Perciò per li valori di $H > 6m$, si può prendere pel raggio medio

$$D = m; \text{ ed } Y = \frac{m}{2} e^{\frac{H}{m}}$$

per l' equazione del profilo della sezione. Quindi per gli stati permanenti del canale, pei quali sarà $H > 6m$, si avrà

$$u = V = \text{cost.}; \; Q = m^2 V . e^{\frac{H}{m}}:$$

Cioè la velocità media sarà costante, e crescendo le altezze dell' acqua in progressione aritmetica, le portate cresceranno in progressione geometrica. La somma rapidità colla quale in questo caso, restando sensibilmente costante la velocità media, crescono le portate per poco che crescano le altezze dell' acqua, si deve visibilmente attribuire alla forma del profilo della sezione del canale.

Si può ancora notare che posta la sezione del canale rettangola e della larghezza 2L, si ha

$$D = \frac{HL}{H+L}.$$

Perciò negli stati permanenti ne' quali H è assai grande rispetto ad L, si ha prossimamente D = L; e quindi

$$u = V = \text{cost.}; \; Q = 2HLV.$$

Si osserverà in fine che quando il profilo della sezione del canale inclinato è composto di più curve espresse da equazioni diverse tra loro, le equazioni (M) ed (N) dovranno modificarsi in una maniera simile a quella esposta al n.° 24; e le relazioni tra la portata, l' altezza e la velocità media non rimarranno più le stesse in qualsivoglia stato permanente del canale.

33. Termineremo queste riflessioni esponendo il seguente metodo assai semplice per risolvere numericamente rispetto alla quantità Q l' equazione

$$(B) \quad Q = \frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\,.\left[\left(a+b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

nella quale, come abbiamo veduto (n.° 5.) Q rappresenta assai prossimamente la portata di una luce rettangola e verticale, di cui l è la larghezza, a l'altezza, b il battente, e libero l' efflusso, quando l'area di questa luce non è molto piccola rispetto alla sezione del canale, di cui L è la larghezza, ed H l'altezza.

Cerchiamo i limiti fra i quali sempre e necessariamente è compresa la quantità Q. Se si prende per l'altezza dovuta alla velocità media dell' efflusso quella che corrisponde alla metà dell'altezza della luce, allora la portata, che chiameremo P, sarebbe data dall'equazione

$$P = \mu\, al\sqrt{2g\left(b+\frac{a}{2}+\frac{P^2}{2gH^2L^2}\right)},$$

dalla quale si ottiene

$$P = \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{a}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Se poi per l'altezza dovuta alla velocità media dell' efflusso si prende quella che corrisponde ai $\frac{4}{9}$ dell' altezza della luce, contati dal lato superiore di questa, la portata, che diremo R, sarebbe somministrata dall' equazione

$$R = \mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9} + \frac{R^2}{2gH^2L^2}\right)}.$$

dalla quale si ricava

$$R = \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Ora è sempre

$$Q < P, \quad \text{e} \quad Q > R$$

cioè

$$Q < \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{a}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

e

$$Q > \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Determinati così i limiti P ed R fra i quali è sempre compresa la quantità Q, si potrebbero coi noti metodi di approssimazione, mediante l' equazione (B), trovare successivamente altri limiti della stessa quantità sempre più vicini tra loro. Noi sceglieremo il seguente metodo, il quale deriva dalle precedenti relazioni tra P, Q ed R, e da quest' altra

$$(a+b+z)^{\frac{3}{2}} - (b+z)^{\frac{3}{2}} > (a+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}},$$

la quale è soddisfatta sempre che le quantità a, b, z sono positive.

Nel secondo membro dell' equazione (B) si metta in vece di Q la quantità R, e sia Q' il valore che prenderà il primo membro della stessa equazione (B). Da ciò che precede, è chiaro che sarà

$$Q' > R, \quad \text{e} \quad Q' < Q.$$

Si ponga nel secondo membro della stessa equazione (B) Q' in vece di Q, e sia Q'' il valore che prenderà il primo membro di (B), sarà

$$Q'' > Q', \quad \text{e} \quad Q'' < Q.$$

Si metta ancora Q'' in vece di Q nel secondo membro dell' equazione (B), e sia Q''' il valore che prenderà il primo membro, si avrà

$$Q''' > Q'', \quad \text{e} \quad Q''' < Q.$$

Continuando nell'istesso modo si otterrà una serie di quantità Q', Q'', Q''' . . . . tali che sarà sempre $Q''>Q'$; $Q'''>Q''$, ecc. $Q'<Q$; $Q''<Q$; $Q'''<Q$; ecc. $<P$. Dal che si vede che le quantità Q', Q'', Q'''. . . . si accosteranno continuamente al vero valore di Q; e perciò quando due di queste quantità consecutive non differiranno tra loro se non che nell'ordine delle cifre che si vogliono trascurare, si prenderà l'ultima di esse quantità pel valore della portata Q della luce.

Le quantità $\frac{Q'^2}{2gH^2L^2}$, $\frac{Q''^2}{2gH^2L^2}$, . . . che si trovano successivamente nel secondo membro dell' equazione (B), si avvicineranno anch' esse continuamente alla quantità $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$; e perciò quando due valori consecutivi $\frac{Q^{(n)2}}{2gH^2L^2}$, $\frac{Q^{(n+1)2}}{2gH^2L^2}$ avranno le stesse cifre nell' ordine di quelle che si vogliono ritenere,

l' operazione sarà terminata, e $Q^{(n+1)}$ sarà il valore della portata Q.

Sia, per cagion d' esempio. $a=2{,}4$ met.; $l=8$ met.; $b=0{,}6$ met.; $H=3$ met.; $L=8$ met.; $\mu=0{,}7$; si troverà

$$P=96{,}3684 \text{ met.cub.};\qquad R=92{,}7603 \text{ met.cub.};$$

e però

$$Q<96{,}3984 \text{ met.cub.};\qquad Q>92{,}7603 \text{ met.cub.}:$$

E facendo per brevità $\frac{1}{2gH^2L^2}=\omega$, si avrà questa serie di valori

met.cub.	met.
$Q'=92{,}7603$;	$\omega Q'^2=0{,}76147$:
$Q''=94{,}3758$;	$\omega Q''^2=0{,}78823$:
$Q'''=94{,}8732$;	$\omega Q'''^2=0{,}79656$:
$Q^{\prime v}=95{,}0318$;	$\omega Q^{\prime v\,2}=0{,}79926$:
$Q^{v}=95{,}0831$;	$\omega Q^{v\,2}=0{,}80009$:
$Q^{v\prime}=95{,}0990$;	$\omega Q^{v\prime\,2}=0{,}80036$:
$Q^{v\prime\prime}=95{,}1041$;	$\omega Q^{v\prime\prime\,2}=0{,}80044$:
$Q^{v\prime\prime\prime}=95{,}1056$,	$\omega Q^{v\prime\prime\prime\,2}=0{,}80047$:
$Q^{\prime x}=95{,}1061$,	$\omega Q^{\prime x\,2}=0{,}80048$:
$Q^{x}=95{,}1066$;	$\omega Q^{x\,2}=0{,}80048$:

Perciò la quantità d' acqua somministrata dalla luce è $Q=95{,}1066$ met.cub. Se nel secondo membro dell' equazione (B) si trascurasse il termine $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$ si avrebbero solamente $78{,}2363$ met.cub. per la richiesta portata.